2019 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010012**

參展科別　數學

作品名稱　費馬多邊形數定理之延伸探討

得獎獎項　大會獎：三等獎

候補作品

就讀學校　臺中市立臺中第一高級中學

指導教師　蔡政樺

作者姓名　廖松毅

關鍵詞　費馬多邊形數定理、四平方和定理、加性數論

作者簡介



我是廖松毅，目前就讀於臺中市立臺中第一高級中學科學班二年級。

我平時喜歡看歷史小說、美國職棒，當然，最喜歡的事還是閱讀數學新知，藉由廣泛的閱讀新知來獲取研究的靈感。偶然之間，我讀到了陶哲軒的科普著作，因而展開了這一段與費馬多邊形數定理的美麗邂逅。

在這次研究費馬多邊形數定理的過程中，我感受到了自己對於數學研究的熱忱，同時也更加確立了人生目標，持續地朝向成為純理論數學家之路前進。

摘要

本研究旨在對費馬多邊形數定理(任意非負整數皆可表成n個n邊形數的和)進行更進一步的延伸探討，更精確地說，即是：對於給定的二次式an^2+bn+c，定義一數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle a_{-1}=0, a_n=an^2+bn+c, \forall n\geq 0\rangle$，而若存在一最小正整數$\gamma$，使得對於所有非負整數$x$，可由數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出共$\gamma$項，滿足$x$恰為這$\gamma$項之和。這時，我們稱正整數$\gamma$為二次式$an^2+bn+c$的指標值，定義函數Yi使得$\gamma=\mathrm{Yi}(an^2+bn+c)$。

在本研究中，首先先行探討函數Yi的一些基本性質，再藉由電腦以暴力法算出一些二次式指標值的下界，從這些指標值中找出規律，將其推廣至所有我們所討論的二次式，並證明之，至於再探討二次式指標值的上界的部分，我將數學家 Melvyn B. Nathanson 證明費馬多邊形數定理的證明技巧，稍作改寫，使其能夠應用至更為一般的情況，藉此系統性的求得二次式指標值的可能上界。最後，經由不斷的優化上界與下界，即可求得二次式的指標值。

Abstract

The propose of this research is to extend the result of Fermat Polygonal Number Theorem (every nonnegative integer can be represent as the sum of n n-gonal numbers). Concretely, the problem this study discuss is that given a two degree polynomial an^2+bn+c, and then define a sequence $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle a_{-1}=0, a_n=an^2+bn+c, \forall n\geq 0\rangle$, if there exists a positive integer γ, such that for every nonnegative integer x, we can choose γ numbers from the sequence $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ satisfying that x equals to the sum of these γ numbers. Here, we call γ is the index value of two degree polynomial an^2+bn+c. Then we define a function Yi such that the relationship between γ and an^2+bn+c can be shown as $\gamma=\mathrm{Yi}(an^2+bn+c)$.

In this study, we will discuss some basic properties about the function Yi first. Second, we will use computer to help us to infer the lower bound of the index value for two degree polynomials. Third, we adapt the skill that Melvyn B. Nathanson used to prove Fermat Polygonal Number Theorem in order to find the possible upper bound of the index value for two degree polynomials. Then, by keeping making the upper and lower bound better, we can find the exact index value of two degree polynomials.

壹、 前言

一、研究動機

起初，我無意間在一本書：陶哲軒教你聰明解數學中看到了四平方和定理，這定理勾起了我莫大的好奇心，於是我便想要證明此定理，無奈卻是徒勞無功，因此，我上網找了這一定理的證明，在看完證明後，發現這真是美妙到令我嘆為觀止，但隨後我發現這麼美麗的定理居然不過是費馬多邊形數定理的一個特例罷了，看完了費馬多邊形數定理後，我又對於數學之美有了更深一層的認識，也決心要持續將費馬多邊形數定理繼續推廣下去。

在歷經去年的參展經驗的洗禮後，我對於此研究議題有了更深一層的體悟，同時也對於當時來不及完全解決此研究議題感到些許遺憾，恰好在去年參展完不久，我便對此議題有了新的靈感，因此，我便決定要持續對此研究主題進行研究，以期能夠達成新的突破。

二、研究目的

本研究主要研究的核心問題為：針對給定的二次式$f(n)=an^2+bn+c$，定義一數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle a_{-1}=0, a_n=an^2+bn+c, \forall n\geq 0\rangle$，研究是否存在一正整數$\gamma$，使得對於任意非負整數$x$，$x$皆可表示成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項之和，以及正整數$\gamma$與二次式$an^2+bn+c$兩者間的關係。

(一) 明確定義所研究之問題、建構出一套理論，並論證出一些可供應用的數學定理。

(二) 藉由所求得定理，分別建構對於任意給定二次式an^2+bn+c，尋求其對應的正整數γ之上界、下界的模型。

(三) 藉由優化研究目的(二)中的模型，使得所求得的上下界差距降低，最後用夾擠求得正整數γ的值。

貳、 研究方法或過程

一、前人的研究成果

(一) 四平方和定理：

任意非負整數必可表成四個完全平方數的和。(證明詳見參考文獻 1)

(二) 費馬多邊形數定理

任意非負整數必可表成n個n邊形數的和。(證明詳見參考文獻 4)

二、名詞定義

(一)泛費馬二次式數列與泛費馬二次式

對於給定一數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$，其中$a_{-1}=0$，已知對於任意非負整數$x$，$x$皆可表示成從原先的數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項之和，其中正整數$\gamma$為一固定數值，不隨$x$而改變。再將數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$的第"$-1$"項去除，而其餘項保留後，可形成另一數列$\langle b_n\rangle_{n=0}^{\infty}$。若數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$的一般式為二次多項式$f(n)=an^2+bn+c$，則我們稱數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$為泛費馬二次式數列，二次多項式$f(n)=an^2+bn+c$為泛費馬二次式。

(二)指標值與泛費馬二次式函數Yi

承上所述，我們稱上述的γ值為泛費馬二次式$f(n)=an^2+bn+c$的指標值，而泛費馬二次式函數即是用來表達泛費馬二次式及其指標值間的關係，也就是說，函數的「自變數」為泛費馬二次式，「應變數」為指標值。換句話說，正整數γ為泛費馬二次式$f(n)=an^2+bn+c$的指標值，可寫為$\mathrm{Yi}(an^2+bn+c)=\gamma$。

(三)泛費馬二次式函數之定義域

1. 狹義定義域

當二次式$f(n)=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$之係數$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},1\right)$滿足下列條件時，

(1) $a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{Z},a+b\equiv 0 \pmod 2$

(2) $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\},f(n)\geq 0$

稱$f(n)$滿足泛費馬二次式函數的狹義定義域。

(根據【預備性質二】，滿足狹義定義域的二次式，其指標值必存在)

2. 廣義定義域

當二次式 $f(n)=\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$

$$=\frac{a}{2}n^2+\left(\frac{b}{2}-ak\right)n+\frac{a}{2}k^2-\frac{b}{2}k+1,$$

其中的數值a,b,k滿足下列條件時，

(1) $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,且$a+b$為非負偶數

(2) $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, f(n) \geq 0$

稱$f(n)$滿足泛費馬二次式函數的廣義定義域。

(根據【預備性質三】，滿足廣義定義域的二次式，其指標值必存在)

三、預備性質

(一)【預備性質一】

若a, b為正奇數，且$b^2 < 4a, b^2 + 2b + 4 > 3a$，

則存在四個非負整數s, t, u, v,使得$\begin{cases} a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 \\ b = s + t + u + v \end{cases}$。

【證明】

因為a, b為正奇數，因此可知$4a - b^2 \equiv 3 (\text{mod } 8)$，藉由高斯所證出的費馬多邊形數定理的特例：三角形數定理，可知：

存在三正奇數$x \geq y \geq z$，滿足$4a - b^2 = x^2 + y^2 + z^2$，

又因為b, x, y, z皆為奇數$\Rightarrow b + x + y + z, b + x + y - z$兩數中必有一數為4的倍數。

1. 假設$b + x + y + z \equiv 0 (\text{mod } 4)$

則令$\begin{cases} s = \frac{b+x+y+z}{4} \\ t = \frac{b+x-y-z}{4} \\ u = \frac{b-x+y-z}{4} \\ v = \frac{b-x-y+z}{4} \end{cases}$

2. 假設$b + x + y - z \equiv 0 (\text{mod } 4)$

則令$\begin{cases} s = \frac{b+x+y-z}{4} \\ t = \frac{b+x-y+z}{4} \\ u = \frac{b-x+y+z}{4} \\ v = \frac{b-x-y-z}{4} \end{cases}$

即可滿足$\begin{cases} a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 \\ b = s + t + u + v \end{cases}$,其中$s \geq t \geq u \geq v$

接下來我們須證明$v > -1$,即是證明$v \geq 0 (\because v \in \mathbb{Z})$

$\because b^2 + 2b + 4 > 3a \Rightarrow b + 4 > \sqrt{12a - 3b^2}$

又因為$4a-b^2=x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \sqrt{12a-3b^2} \geq x+y+z$

$\therefore b+4>x+y+z \Rightarrow \ v>-1$，得證。

(二) 【預備性質二】

對於所有形如$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$的二次式，

若滿足$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, a+b \equiv 0 \ (mod \ 2)$，

則二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$的指標值存在。

也就是說，存在一指標值γ，使得任意非負整數x皆可表成由二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$所建構的數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中所選出的$\gamma$項之和。

【證明】

1. 首先我們注意到，證明上述敘述等同於證明：存在一正整數γ，使得對於所有足夠大的非負整數x，x皆可表成數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中$\gamma$項之和。
2. 定義一正奇數b'及一變數r，

   其中x與r的關係為$x \equiv \frac{a+b}{2}b'+4+r \ (\text{mod} \ a), \ r \in \{0,1,2,\dots \ ,a-1\}$

   且再定義一正奇數$a'=\frac{2\left(x-\frac{a+b}{2}b'-4-r\right)}{a}+b' \Rightarrow x=\frac{a}{2}a'+\frac{b}{2}b'+4+r$，又因為對於所有的$r$值，$r$皆可表成數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$a-1$項之和，於是根據預備性質一，若$a', b'$滿足下列不等式$\begin{cases} b'^2<4a' \\ b'^2+2b'+4>3a' \end{cases}$，即存在非負整數$s,t,u,v$使得$\begin{cases} a'=s^2+t^2+u^2+v^2 \\ b'=s+t+u+v \end{cases} \Rightarrow x=\left(\frac{a}{2}s^2+\frac{b}{2}s+1\right)+\left(\frac{a}{2}t^2+\frac{b}{2}t+1\right)$
   $+\left(\frac{a}{2}u^2+\frac{b}{2}u+1\right)+\left(\frac{a}{2}v^2+\frac{b}{2}v+1\right)+r$

   則此非負整數x可表成數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中$a+3$項之和。

   因此可將預備性質二陳述成以下等價型式：

   claim:

   對所有足夠大的非負整數x，皆可找到一個正奇數b'，使得依照上述定義所定義出的a'滿足不等式組$\begin{cases} b'^2<4a' \\ b'^2+2b'+4>3a' \end{cases}$。
3. 因此，以下將證明：「給定一正整數a、一整數b，其中$a+b>-2$時，若當一

非負整數x滿足不等式$x \geq \frac{24(a+b)^2}{a} + 9a + 8b + 4 + r$，其中

$r \in \{0, 1, 2, \ldots\ , a-1\}$，於是可找到一符合預備性質一的正奇數$b'$，使得同餘式

$x \equiv \frac{a+b}{2}b' + 4 + r \pmod{a}$成立，則正奇數$a' = \frac{2\left(x - \frac{a+b}{2}b' - 4 - r\right)}{a} + b'$，將會滿足不等式組$\begin{cases} b'^2 < 4a' \\ b'^2 + 2b' + 4 > 3a' \end{cases}$。亦即存在四非負整數$s, t, u, v$，使得$a', b'$滿足方程組$\begin{cases} a' = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 \\ b' = s + t + u + v \end{cases}$。」

4. 因為正奇數$a' = \frac{2\left(x - \frac{a+b}{2}b' - 4 - r\right)}{a} + b' = \left(1 - \frac{a+b}{a}\right)b' + 2\left(\frac{x-4-r}{a}\right)$，所以不等式組$\begin{cases} b'^2 < 4a' \\ b'^2 + 2b' + 4 > 3a' \end{cases}$可改寫為$\begin{cases} b'^2 < \left(4 - 4\left(\frac{a+b}{a}\right)\right)b' + 8\left(\frac{x-4-r}{a}\right) \\ b'^2 + 2b + 4 > \left(3 - 3\left(\frac{a+b}{a}\right)\right)b' + 6\left(\frac{x-4-r}{a}\right) \end{cases}$

為了方便表達，我們令$y = \frac{x-4-r}{a}, z = \frac{a+b}{a}$，於是不等式組可再改寫為

$\begin{cases} b'^2 < (4 - 4z)b' + 8y \\ b'^2 + 2b' + 4 > (3 - 3z)b' + 6y \end{cases}$，此不等式組的解為：

$b' \in \left(\frac{\sqrt{9z^2 - 6z + 24y - 15}}{2} - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}, 2\sqrt{z^2 - 2z + 2y + 1} - 2z + 2\right)$

因此若要保證b'為一正奇數，則此區間的大小必須大於2，換句話說，不等式

$\left(2\sqrt{z^2 - 2z + 2y + 1} - 2z + 2\right) - \left(\frac{\sqrt{9z^2 - 6z + 24y - 15}}{2} - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}\right) > 2$　須成立。

又因為不等式$x > \frac{24(a+b)^2}{a} + 9a + 8b + 4 + r$移項可得不等式

$\frac{x - 4 - r}{a} > 24\left(\frac{a+b}{a}\right)^2 + 8\left(\frac{a+b}{a}\right) + 1 \Rightarrow y > 24z^2 + 8z + 1$

而經過互相對照與帶入後可知$y > 24z^2 + 8z + 1$為不等式

$\left(2\sqrt{z^2 - 2z + 2y + 1} - 2z + 2\right) - \left(\frac{\sqrt{9z^2 - 6z + 24y - 15}}{2} - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}\right) > 2$成立的充分條件。也就是說，當$y > 24z^2 + 8z + 1 \Rightarrow x > \frac{24(a+b)^2}{a} + 9a + 8b + 4 + r$時，必存在一正奇數$b'$使得存在四非負整數$s, t, u, v$滿足方程組

$\begin{cases} a' = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 \\ b' = s + t + u + v \end{cases}$。

5. 亦即，當非負整數$x > \frac{24(a+b)^2}{a} + 9a + 8b + 4 + r$時，$x$必可表成數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$

中取出的$a+3$項之和

$x=\left(\frac{a}{2}s^2+\frac{b}{2}s+1\right)+\left(\frac{a}{2}t^2+\frac{b}{2}t+1\right)+\left(\frac{a}{2}u^2+\frac{b}{2}u+1\right)+\left(\frac{a}{2}v^2+\frac{b}{2}v+1\right)+r$

而當非負整數$x\le\frac{24(a+b)^2}{a}+9a+8b+4+r$時，顯然，對於所有的$x$無論如何都可以被表成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\frac{24(a+b)^2}{a}+9a+8b+4+r$項之和，又$r\le a-1$，故對於任意的非負整數$x$，$x$皆可被表成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\max\left(\frac{24(a+b)^2}{a}+10a+8b+3,a+3\right)$項之和，故對於任一滿足狹義定義域的二次式，其指標值存在，得證。

(三)【預備性質三】

一個二次式的指標值存在且此二次式建構出的數列為正整數數列的充要條件是此二次式$g(n)$滿足泛費馬二次式函數的廣義定義域，即

$g(n)$為形如$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$的二次式。

【證明】

1. 充分性證明：若二次式滿足泛費馬二次式的廣義定義域，則此二次式的指標值存在且此二次式建構出的數列為非負整數數列。

   設$g(n)=f(n-k)=\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1\Rightarrow f(n)=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1,$

   $\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle a_{-1},a_0,a_1,\dots\rangle$

   $=\langle 0,g(0),g(1),\dots,g(k-1),g(k),g(k+1),g(k+2),\dots\rangle$

   $=\langle 0,g(0),g(1),\dots,g(k-1),f(0),f(1),f(2),\dots\rangle$，觀察後可得知在數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中，具有$0,f(0),f(1),f(2),\dots$等項，而又因為$f(n)$符合泛費馬二次式函數的狹義定義域，根據預備性質二，$f(n)$的指標值存在，因此根據指標值所代表的意義可知，$g(n)$的指標值存在。且根據二次式的基本性質可得知，滿足泛費馬二次多項式的廣義定義域的二次多項式建構出的數列為非負整數數列，得證。

2. 必要性證明：若二次式$g(n)$的指標值存在且此二次式建構出的數列為正整數數列，則此二次式滿足泛費馬二次式的廣義定義域。

若二次式$g(n)$的指標值存在，則必存在一非負整數k，使得

$g(k)=1$，故可設$g(n)=c_2(x-k)^2+c_1(x-k)+1\ldots(1)$，

且因為此二次式建構出的數列須為正整數數列，因此$g(k+1),g(k+2)$需皆為正整數，也就是說，c_2+c_1+1與 $4c_2+2c_1+1$皆為正整數，所以$2c_2-1$與$2c_1+3$皆為整數，換句話說，c_1,c_2可表成$c_1=\frac{b}{2},c_2=\frac{a}{2}$，其中$a,b$皆為整數且$a+b$為正偶數…(2)，

並且隨著n趨近於無窮大，$g(n)$亦需趨近於無窮大，否則將無法在固定的有限項中，表示出任意大的非負整數，故a必須要大於$0\ldots(3)$，

綜合以上$(1),(2),(3)$點的結論可發現如此一來正好滿足了泛費馬二次式的廣義定義域，得證。

同時，這也說明了為何我們會如此定義廣義定義域。

(註：廣義定義域的定義如下：

當二次式$f(n)=\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$

$=\frac{a}{2}n^2+\left(\frac{b}{2}-ak\right)n+\frac{a}{2}k^2-\frac{b}{2}k+1$，

其中的數值a,b,k滿足下列條件時，

(1) $a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,且$a+b$為非負偶數，

(2) $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\},f(n)\geq 0$，

稱$f(n)$滿足泛費馬二次式函數的廣義定義域。)

(四)【預備性質四】

對於所有二次式型如$f(n)=\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n,p\in\mathbb{Q},p=\frac{\alpha}{\beta}$，縱使其建構出的數列可能不為正整數數列，$f(n)$的指標值仍存在。

【證明】

1. 證明$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值$\gamma$存在，即是證明：對於所有足夠大的非負整數$x$，$x$皆可表成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項之和，$\gamma$即為我們所稱之指標值，而其中$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle a_{-1},a_0,a_1,\ldots\rangle=\langle 0,f(0),f(1),\ldots\rangle$。

2. 因為$x=\sum_{i=1}^{\gamma}\left(\frac{p-2}{2}{n_i}^2+\frac{4-p}{2}n_i\right)\Leftrightarrow \beta x=\sum_{i=1}^{\gamma}\left(\frac{\beta(p-2)}{2}{n_i}^2+\frac{(4-p)}{2}n_i\right)$，所以，可將預備性質四陳述成以下等價命題：

claim:

對於所有大於$\frac{(\alpha-4\beta)^2}{2(\alpha-2\beta)}-7(\alpha-2\beta)+22\beta+(\alpha-2\beta-1)\beta$且型如$\beta x, x\in\mathbb{N}$的非負整數，$\beta x$皆可表成數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項之和，

其中$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle b_{-1},b_0,b_1,\dots\rangle=\langle 0,\beta\times f(0),\beta\times f(1),\dots\rangle$，$\gamma$為一不隨$x$改變的正整數。

3. 上述命題的證明如下：

定義$r\in\{0,\beta,2\beta,\dots,(\alpha-2\beta-1)\beta\}, b\in\{b_0\},$ 其中b_0為正奇數。於是可知，對於所有非負整數βx，皆存在b與r，滿足同餘式

$\beta x\equiv \beta b+r \pmod{\alpha-2\beta}$

再定義一正奇數$a=\frac{2(\beta x-\beta b-r)}{\alpha-2\beta}+b=\left(1-\frac{2\beta}{\alpha-2\beta}\right)b+\frac{2(\beta x-r)}{\alpha-2\beta}$，於是發現$\beta x=\frac{\beta(p-2)}{2}a+\frac{\beta(4-p)}{2}b+r$，也就是說，對於一非負整數$\beta x$，若存在一對正奇數$a,b$，符合預備性質一，其中

$a=\left(1-\frac{2\beta}{\alpha-2\beta}\right)b+\frac{2(\beta x-r)}{\alpha-2\beta}$，則此非負整數$\beta x$可表成數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$4+(\alpha-2\beta-1)$項之和。…(1)

因為正奇數a,b，需符合預備性質一，故

$$\begin{cases} 4a>b^2 \\ b^2+2b+4>3a \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b^2-\left(4-\frac{8\beta}{\alpha-2\beta}\right)b-\frac{8(\beta x-r)}{\alpha-2\beta}<0 \\ b^2+\left(2-3+\frac{6\beta}{\alpha-2\beta}\right)b+4-\frac{6(\beta x-r)}{\alpha-2\beta}>0 \end{cases},$$

令$1-\frac{2\beta}{\alpha-2\beta}=c,\frac{2(\beta x-r)}{\alpha-2\beta}=d$，則上述的不等式方程組可改寫較簡潔的型式：

$\begin{cases} b^2-4cb-4d<0 \\ b^2+(2-3c)b+4-3d>0 \end{cases}$。解方程組可得

$b\in\left(\frac{(3c-2)+\sqrt{(3c-2)^2+12d-16}}{2},\frac{4c+\sqrt{16c^2+16d}}{2}\right)$，因為此區間內至少需有一正奇數$b_0$，所以此區間長度需大於2，而解不等式

$\left(\frac{4c+\sqrt{16c^2+16d}}{2}\right)-\left(\frac{(3c-2)+\sqrt{(3c-2)^2+12d-16}}{2}\right)>2$時比較係數後可發現：當$d>$

$c^2-22c+8$時，不等式將成立，而不等式$d>c^2-22c+8$

$\Rightarrow \frac{2(\beta x-r)}{\alpha-2\beta}>\left(1-\frac{2\beta}{\alpha-2\beta}\right)^2-22\left(1-\frac{2\beta}{\alpha-2\beta}\right)+8$

$\Rightarrow \beta x>\frac{(\alpha-4\beta)^2}{2(\alpha-2\beta)}-7(\alpha-2\beta)+22\beta+r$，又$r$的最大值為

$(\alpha-2\beta-1)\beta$，因此結合前面的論證結果(1)，可知當

$\beta x>\frac{(\alpha-4\beta)^2}{2(\alpha-2\beta)}-7(\alpha-2\beta)+22\beta+(\alpha-2\beta-1)\beta$時，$\beta x$可表成數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$4+(\alpha-2\beta-1)$項之和。換句話說，對於所有足夠大的非負整數$x$，$x$可表成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$4+(\alpha-2\beta-1)$項之和，所以我們可知對於所有非負整數$x$，$x$皆可表成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的

$\max\left(\left\lfloor\frac{(\alpha-4\beta)^2}{2(\alpha-2\beta)}-7(\alpha-2\beta)+22\beta+(\alpha-2\beta-1)\beta\right\rfloor,4+(\alpha-2\beta-1)\right)$項之和，故$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值$\gamma$存在，得證。

四、研究過程、數學定理與數學模型

(一)【探究過程一】

首先，在證明了各類型的泛費馬二次式之指標值存在後，我們想知道泛費馬二次式函數中的一些基本性質，其中相當重要的便是：考慮一個滿足狹義定義域的二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$，在做了平移變換後，得到了一個滿足廣義定義域的二次式$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$，這兩個二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1,\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$的指標值有何關係？

【基本例探究】

先從以下的基本例出發，假設$\langle a_n\rangle=\langle\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,0,1,3,6,10,15,\cdots\rangle$

$\langle b_n\rangle=\langle\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,0,0,1,3,6,10,15,\cdots\rangle$

根據費馬多邊形數定理，可知這兩個二次式的指標值

$\mathrm{Yi}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)=\mathrm{Yi}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right)=3$

由上式可知，縱使泛費馬二次多項式數列不同，但其γ值依舊可能相同。再進一步

分析，此兩數列似乎存在一種平移變換關係，因為數列$\langle a_n\rangle$的第$1,2,3,4,\ldots$項依序為數列$\langle b_n\rangle$的第$2,3,4,5,\ldots$項。因此我們想深入探究在此情形下的兩個泛費馬二次式數列之間的平移變換關係。定理一即在說明在兩個泛費馬二次式數列之間的平移變換關係，對其所對應的γ值之關係式。

【定理一】

對於兩個分別滿足泛費馬二次式函數的狹義與廣義定義域的二次式

$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1,\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$，其中$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$的指標值將會大於等於

$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$的指標值，

寫為$\mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right)\geq \mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1\right)$。

【證明】

令$f(n)=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1, g(n)=\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$，

數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle a_{-1},a_0,a_1,\ldots\rangle=\langle 0,f(0),f(1),\ldots\rangle$，

$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle b_{-1},b_0,b_1,\ldots\rangle=\langle 0,g(0),g(1),\ldots\rangle$，因為$f(n)=g(n+k)$，

亦即$a_n=b_{n+k}$，對於所有非負整數n皆成立。

換句話說，數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中的每一項皆存在於數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中，

故根據指標值所代表的意義可知，若$f(n)$的指標值為γ，

則任意非負整數x皆可表成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項和，

於是可推知任意非負整數x皆可表成數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項和，

亦即$\mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1\right)\leq\gamma=\mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right)$，得證。

(二)【探究過程二】

接著，我們便開始針對型如an^2+1之特殊二次式(即四邊形數的正整數倍加1(註:加一是為了滿足狹義定義域))，探討其指標值。

【基本例探究】

1. 首先，我們先從n^2+1開始探究，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列

$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=n^2+1\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,1,2,5,10,17,26,37,50,65,\ldots\rangle$，因為非負整數

58至少須由1,2,5,50四個非負整數之和表達，

所以Yi$(n^2+1) \geq 4$ … [1]

又令$p_4(n) = n^2$，並假設一非負整數

$x = \sum_{i=1}^{4}({n_i}^2+1) = \sum_{i=1}^{4}(p_4(\alpha_i)+1) = \sum_{i=1}^{4} p_4(\alpha_i) + 4$，

根據費馬多邊形數定理，$p_4(n)$的指標值為4，

故$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$四個數之和可組成任意大於等於 4 的非負整數，

又$0 = 0\times 4, 1 = 1+0\times 3, 2 = 2+0\times 3, 3 = 2+1+0\times 2$，

故Yi$(n^2+1) \leq 4$ … [2]，

由小結[1]及小結[2]，知Yi$(n^2+1) = 4$。

2. 接下來，我們開始探究$2n^2+1$，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列

$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, a_n = 2n^2+1 \rangle_{n=0}^{\infty} = \langle 0,1,3,9,19,33,51,\dots \rangle$，因為非負整數17至少須由1,1,3,3,9五個非負整數之和表達，

所以Yi$(2n^2+1) \geq 5$ … [3]

又假設一非負整數$x = \sum_{i=1}^{4}(2{n_i}^2+1) + r = \sum_{i=1}^{4}(2p_4(\alpha_i)+1) + r$

$= 2\sum_{i=1}^{4} p_4(\alpha_i) + 4 + r$，

根據費馬多邊形數定理，$p_4(n)$的指標值為4，

所以$2\sum_{i=1}^{4} p_4(\alpha_i) + 4$可表示出任意大於等於4且模2餘0的非負整數，

故若令$0 \leq r \leq 1$的話，$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, a_{\alpha_4}$與一個$a_{-1}$或$a_0$，這五個數之和可組成任意大於等於4的非負整數，

又$0 = 0\times 5, 1 = 1+0\times 4, 2 = 1+1+0\times 3, 3 = 3+0\times 4$，

故Yi$(2n^2+1) \leq 5$ … [4]，

由小結[3]及小結[4]，知Yi$(2n^2+1) = 5$。

3. 接著，我們開始探究$3n^2+1$，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列

$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, a_n = 3n^2+1 \rangle_{n=0}^{\infty} = \langle 0,1,4,13,28,49,76,\dots \rangle$，因為非負整數24至少須由1,1,1,4,4,13六個非負整數之和表達，

所以Yi$(3n^2+1) \geq 6$ … [5]，又假設一非負整數$x = \sum_{i=1}^{4}(3{n_i}^2+1) + r$

$= \sum_{i=1}^{4}(3p_4(\alpha_i)+1) + r = 3\sum_{i=1}^{4} p_4(\alpha_i) + 4 + r$，

根據費馬多邊形數定理，$p_4(n)$的指標值為4，

所以$3\sum_{i=1}^{4} p_4(\alpha_i)+4$可表示出任意大於等於4且模3餘1的非負整數，

故若令$0 \le r \le 2$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, a_{\alpha_4}$與二個$a_{-1}$或$a_0$，這六個數之和可組成任意大於等於4的非負整數，

又$0=0\times 6, 1=1+0\times 5, 2=1+1+0\times 4, 3=1+1+1+0\times 3$，

故$\mathrm{Yi}(3n^2+1) \le 6 \ldots [6]$，

由小結[5]及小結[6]，知$\mathrm{Yi}(3n^2+1)=6$。

4. 再來，我們開始探究$4n^2+1$，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0, a_n=4n^2+1\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,1,5,17,37,65,101,\ldots\rangle$，因為非負整數31至少須由1,1,1,1,5,5,17七個非負整數之和表達，

所以$\mathrm{Yi}(4n^2+1) \ge 7 \ldots [7]$，

又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{4}(4{n_i}^2+1)+r=\sum_{i=1}^{4}(4p_4(\alpha_i)+1)+r$

$=4\sum_{i=1}^{4} p_4(\alpha_i)+4+r$，根據費馬多邊形數定理，$p_4(n)$的指標值為4，所以$4\sum_{i=1}^{4} p_4(\alpha_i)+4$可表示出任意大於等於4且模4餘0的非負整數，

故若令$0 \le r \le 3$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, a_{\alpha_4}$與三個$a_{-1}$或$a_0$，

這七個數之和可組成任意大於等於4的非負整數，

又$0=0\times 7, 1=1+0\times 6, 2=1+1+0\times 5, 3=1+1+1+0\times 4$，

故$\mathrm{Yi}(4n^2+1) \le 7 \ldots [8]$

由小結[7]及小結[8]，知$\mathrm{Yi}(4n^2+1)=7$。

5. 根據以上 1.、2.、3.、4.的結論可以猜想：

若$a \in \mathbb{N}$，則$\mathrm{Yi}(an^2+1)=a+3$。並整理、論證成下述的定理二。

【定理二】

對於一個泛費馬二次式$an^2+1, a \in \mathbb{N}$，其指標值為$a+3$。

也就是說，令二次式an^2+1所建構出的數列為$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$，

於是，任意非負整數皆可表成從數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$a+3$項之和。

【證明】

1. 此二次多項式an^2+1所形成的泛費馬二次式數列為

$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, a_n = an^2+1\rangle_{n=0}^{\infty}$

$= \langle 0{,}1\ , a+1\ , 4a+1\ , 9a+1\ , 16a+1\ , 25a+1\ , \dots\rangle$

(1) 當$a=1$時，則根據上述探究基本例 1.的敘述可得證

(2) 當$a=2$時，則根據上述探究基本例 2.的敘述可得證

(3) 當$a\geq 3$時，其中考慮非負整數$7a+3$，

因為$a\geq 3 \Rightarrow 9a+1 > 7a+3$，

所以非負整數$7a+3$至少需由$(4a+1)\times 1+(a+1)\times 2+1\times a$，

共$a+3$個非負整數之和表達，

故$\mathrm{Yi}(an^2+1)\geq a+3$ … [9]

2. 又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{4}(an_i{}^2+1)+r=\sum_{i=1}^{4}(ap_4(\alpha_i)+1)+r$

$=a\sum_{i=1}^{4}p_4(\alpha_i)+4+r$，

根據費馬多邊形數定理，$p_4(n)$的指標值為4，

所以$a\sum_{i=1}^{4}p_4(\alpha_i)+4$可表示出任意大於等於4且模$a$餘4的非負整數，

故若令$0\leq r\leq a-1$的話，

$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, a_{\alpha_4}$與$a-1$ 個a_{-1}或a_0，

這$a+3$ 個數之和可組成所有大於等於4的非負整數，

又$0=0\times(a+3), 1=1+0\times(a+2), 2=1+1+0\times(a+1),$

$3=1+1+1+0\times a$，

故$\mathrm{Yi}(an^2+1)\leq a+3$ … [10]

由小結[9]及小結[10]，知$\mathrm{Yi}(an^2+1)=a+3$，得證。

(三)【探究過程三】

在探究過程二中，我們藉由費馬多邊形數定理得知，二次式n^2的指標值為4，並以此為基礎，發現了型如an^2+1的二次式的指標值。於是，我們想：可否藉由類似方法，求得$\frac{a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1$的指標值。

【基本例探究】

1. 首先，我們先從$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$開始探究，此二次多項式所形成的泛費馬二次式

數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,1,1,2,4,7,11,\dots\rangle$，因為非負整數10至少須由$1,2,7$這三個非負整數之和表達，所以$\mathrm{Yi}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\right)\geq 3\dots[1]$。

令數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,b_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,0,0,1,3,\dots\rangle$，觀察可發現數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$亦為三角形數數列，故$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$的指標值為3。

設$x=\sum_{i=1}^{3}a_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{3}\left(b_{\alpha_i}+1\right)=\sum_{i=1}^{3}\left(b_{\alpha_i}\right)+3$，其中因為$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$的指標值為3，所以$\sum_{i=1}^{3}b_{\alpha_i}$可表示出任意非負整數，因此$x$可表示出任意大於等於3的非負整數，又一一列舉後可發現，非負整數$0,1,2$亦可表示成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的3項之和，所以$\mathrm{Yi}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\right)\leq 3\dots[2]$

根據小結[1]與小結[2]，可知$\mathrm{Yi}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\right)=3$。

2. 接下來，我們開始探討二次式n^2-n+1，此二次式所建構出的泛費馬二次式數列為$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=n^2-n+1\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,1,1,3,7,13,\dots\rangle$，其中非負整數12至少須由$1,1,3,7$這四個非負整數之和表達，所以$\mathrm{Yi}(n^2-n+1)\geq 4\dots[3]$。

令數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,b_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,0,0,1,3,\dots\rangle$，觀察可發現數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$亦為三角形數數列，故$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$的指標值為3。

設$x=\sum_{i=1}^{3}a_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{3}\left(2b_{\alpha_i}+1\right)=2\sum_{i=1}^{3}\left(b_{\alpha_i}\right)+3$，其中因為$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$的指標值為3，所以$\sum_{i=1}^{3}b_{\alpha_i}$可表示出任意非負整數，因此$x$可表示出任意大於等於3且模2餘3的非負整數，故設$y=x+r$，其中$r\in\{0,1\}$，由此可知$y$可表示出任意大於等於3的非負整數，且因為$x$可表示成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的3項之和，$r$可表示成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的1項之和，所以任意大於等於3的非負整數皆可表示成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的4項之和，又一一列舉後可發現非負整數$0,1,2$亦可表達成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的4項之和，所以$\mathrm{Yi}(n^2-n+1)\leq 4\dots[4]$。

根據小結[3]與小結[4]，可知$\mathrm{Yi}(n^2-n+1)=4$。

3. 接著，我們開始探討二次式$\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1$，此二次式所建構出的泛費馬二次式

數列為$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,1,1,4,10,19,\dots\rangle$，其中非負整數17至少須由$1,1,1,4,10$這五個非負整數之和表達，

所以$\mathrm{Yi}\left(\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\right)\geq 5\dots[5]$。

令數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,b_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,0,0,1,3,\dots\rangle$，觀察可發現數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$亦為三角形數數列，故$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$的指標值為3。

設$x=\sum_{i=1}^{3}a_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{3}(3b_{\alpha_i}+1)=3\sum_{i=1}^{3}(b_{\alpha_i})+3$，其中因為$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$的指標值為3，所以$\sum_{i=1}^{3}b_{\alpha_i}$可表示出任意非負整數，因此$x$可表示出任意大於等於3且模3餘0的非負整數，故設$y=x+r$，其中$r\in\{0,1,2\}$，由此可知$y$可表示出任意大於等於3的非負整數，且因為$x$可表示成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的3項之和，$r$可表示成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的2項之和，所以任意大於等於3的非負整數皆可表示成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的5項之和，又一一列舉後可發現非負整數$0,1,2$亦可表達成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的5項之和，所以$\mathrm{Yi}\left(\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\right)\leq 5\dots[6]$。

根據小結[5]與小結[6]，可知$\mathrm{Yi}\left(\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\right)=5$。

4. 根據上述 1.、2.、3.的結論，我們可猜想出：$\mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)=a+2$。

   並整理、論證成下述的定理三。

【定理三】

對於一個泛費馬二次式$\frac{a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1,a\in\mathbb{N}$，其指標值為$a+2$。

也就是說，設由二次式$\frac{a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1$所建構出的數列為$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$，則任意非負整數皆可表成從數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$a+2$項之和。

【證明】

1. 此二次多項式$\frac{a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1$所形成的泛費馬二次式數列為

   $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\rangle_{n=0}^{\infty}$

   $=\langle 0,1,1,a+1,3a+1,6a+1\ ,10a+1\ ,\dots\rangle$

(1) 當$a=1$時，則根據上述探究基本例 1.的敘述可得證

(2) 當$a\geq 2$時，考慮非負整數$5a+2$，因為$a\geq 2\Rightarrow 6a+1>5a+2$，

所以非負整數$5a+2$至少需由$(3a+1)\times 1+(a+1)\times 1+1\times a$，

共$a+2$個非負整數之和表達，

故Yi$\left(\frac{a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)\geq a+2$ … [7]

2. 令數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,b_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,0,0,1,3,\ldots\ \rangle$，觀察可發現數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$亦為三角形數數列，故$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$的指標值為3。

設$x=\sum_{i=1}^{3}a_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{3}(ab_{\alpha_i}+1)=a\sum_{i=1}^{3}(b_{\alpha_i})+3$，其中因為$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$的指標值為3，所以$\sum_{i=1}^{3}b_{\alpha_i}$可表示出任意非負整數，故$x$可表達出任意模$a$餘3的非負整數，故設$y=x+r=\sum_{i=1}^{3}(a_{\alpha_i})+r$，其中 $r\in\{0,1,2,\ldots\ ,a-1\}$，

由此可知y可表達出任意大於等於3的非負整數，且因為x可表示成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的3項之和，$r$可表示成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$a-1$項之和，所以任意大於等於3的非負整數皆可表示成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$a+2$項之和，又一一列舉後可發現，非負整數$0,1,2$亦皆可表成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$a+2$項之和，所以Yi$\left(\frac{a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)\leq a+2$ … [8]

3. 根據小結[7]與小結[8]，可知Yi$\left(\frac{a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)=a+2$，得證。

(四)【探究過程四】

在探究過程二、三中，我們藉由費馬多邊形數定理得知，二次式n^2的指標值為4；二次式$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$的指標值為3，並以此為基礎，發現了型如$an^2+1$與型如$\frac{a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1$的二次式的指標值。於是，我們想：若已知泛費馬二次式$f(n)$的指標值，可否藉此得知泛費馬二次式$af(n)+1$的指標值？

【基本例探究】

在定理二、定理三的證明中，可發現到此證明方法不單單只能用於討論an^2+1或$\frac{a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1$的指標值上，實際上，將此方法稍作改變後，便可應用於更一般化的

情況：例如，模仿定理二的證明可知：(以下的a皆為正整數)

1. $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$的指標值為3 $\Rightarrow \mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1\right)=a+2$。
2. $\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$的指標值為5 $\Rightarrow \mathrm{Yi}\left(\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)=a+4$。
3. $\frac{m-2}{2}n^2+\frac{4-m}{2}n$的指標值為$m$ $\Rightarrow \mathrm{Yi}\left(\frac{a(m-2)}{2}n^2+\frac{a(4-m)}{2}n+1\right)=a+m-1$。

【定理四】

已知泛費馬二次式$f(n)$的常數項為0，且其指標值為γ，

若a為一正整數，則$af(n)+1$的指標值小於等於$a+\gamma-1$。

簡單而言，若$af(n)+1$滿足泛費馬二次式函數的定義域，

則$\mathrm{Yi}(af(n)+1)\le a+\gamma-1$。

【證明】

1. 設數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle a_{-1},a_0,a_1,\dots\rangle=\langle 0,0,f(1),\dots\rangle$，

   數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle b_{-1},b_0,b_1,\dots\rangle=\langle 0,1,af(1)+1,\dots\rangle$，

   非負整數$y=\sum_{i=1}^{\gamma}b_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{\gamma}\left(a\times a_{\alpha_i}+1\right)=a\sum_{i=1}^{\gamma}\left(a_{\alpha_i}\right)+\gamma\dots[1]$。
2. 因為$f(n)$的指標值為γ，故對於任意非負整數x，x皆可表成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項之和。也就是說，存在$\gamma$個非負整數$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_\gamma$，

   使得$x=\sum_{i=1}^{\gamma}a_{\alpha_i}$(因為$a_0=a_{-1}$，故不需考慮$a_{-1}$項)。

   因此，在[1]式中$y=\sum_{i=1}^{\gamma}b_{\alpha_i}=a\sum_{i=1}^{\gamma}\left(a_{\alpha_i}\right)+\gamma$可表示任意模$a$餘$\gamma$的非負整數，故若設$z=y+r=\sum_{i=1}^{\gamma}\left(b_{\alpha_i}\right)+r=a\sum_{i=1}^{\gamma}\left(a_{\alpha_i}\right)+\gamma+r$，

   其中 $r\in\{0,1,2,\dots\ ,a-1\}$，則$z$可表達出任意大於等於$\gamma$的非負整數，其中$y$為數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中$\gamma$項之和，$r$為數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中$a-1$項之和，所以$z$為數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中$a+\gamma-1$項之和…[2]。
3. 又因為$a+\gamma-1>\gamma-1$，故任意小於等於$\gamma-1$的非負整數均可表成數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中$a+\gamma-1$項之和…[3]。
4. 於是，結合[2]與[3]的結論可知，$af(n)+1$的指標值小於等於$a+\gamma-1$，得證。

(五)【探究過程五】

在前述的定理中，我們主要是依靠著費馬多邊形數定理作為基礎，求得一些二次式的指標值，目前，最為一般化的結論便是寫於【定理四】的【基本例探究】中的：$\mathrm{Yi}\left(\frac{a(m-2)}{2}n^2+\frac{a(4-m)}{2}n+1\right)=a+m-1$，從此式中，明顯可看出費馬多邊形數定理的影子，但同時，若不修正探討方法，本研究將無法繼續前進，故我們想到了一個有趣的方法：在$m\geq 2$的前提下，將m的取值由正整數推廣至有理數，故將我們探討的二次式改寫為$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$，$t\in\mathbb{N}$，$p\in\mathbb{Q}$，$p>2$，$tp\in\mathbb{N}$ (因為所探討的數是有理數，故將m改成p以示區別，且因為我們探討的是非負整數數列，故需加入$tp\in\mathbb{N}$此條件)，如此一來，便只需要找出$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值，再藉由【定理四】即可大大的推展研究成果。(根據【預備性質四】，二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值存在。)

【基本例探究】

因為需要改寫主要探討之二次式的表達式，故首要之務便是證明此表達式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$與滿足狹義定義域的二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$之間的等價關係。因此我們可得到係數之間的聯立關係式：$\begin{cases}a=t(p-2)\\ b=t(4-p)\end{cases}$，解此聯立式後，我們便可得到定理五的結論。

【定理五】

已知二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$滿足泛費馬二次式函數的狹義定義域，

若$a+b>0$，則存在一正整數、有理數序對(t,p)，使得對於任意非負整數n，原二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$皆可等於$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$，

其中$\begin{cases}t=\frac{a+b}{2}\\ p=\frac{2a}{a+b}+2\end{cases}$，特別注意到，不論$a,b$的取值為何，$p$之值恆大於$2$。

【證明】

令原二次式為$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$，設一數$t=\frac{a+b}{2}$，另一數$p=\frac{2a}{a+b}+2$，於是可知：

$\begin{cases} a = t(p-2) \\ b = t(4-p) \end{cases}$，因此原二次式$\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n + 1$與二次式$\frac{t(p-2)}{2}n^2 + \frac{t(4-p)}{2}n + 1$，這兩個二次式的係數相等。

換句話說，$\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n + 1 = \frac{t(p-2)}{2}n^2 + \frac{t(4-p)}{2}n + 1$，且因為原二次式滿足泛費馬二次式函數的狹義定義域，且$a + b \neq 0$，故$a + b$為正偶數，亦即t為正整數，同樣地可知，p為大於2的有理數且tp為正整數，得證。

(六)【探究過程六】

在定理五中，我們將探討的二次式表達式由$\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n + 1$轉變成了$\frac{t(p-2)}{2}n^2 + \frac{t(4-p)}{2}n + 1$，而根據定理四可得知，若求得二次式$\frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n$的指標值，即可求得$\frac{t(p-2)}{2}n^2 + \frac{t(4-p)}{2}n + 1$的指標值的上界。因此本模型的建構目的便是：藉由參考文獻中證明費馬多邊形數定理的技巧，稍作改變之後，用以求得二次式$\frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n$的指標值(根據【預備性質四】，二次式$\frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n$的指標值必存在)。

【模型一】

1. 設$\frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n$的指標值為$\gamma$，換句話說，對於任意非負整數$x$，$x$皆可表成數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項之和，其中$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, a_n = \frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n \rangle_{n=0}^{\infty}$，$p = \frac{\alpha}{\beta}$。(在此情況下，$a_0 = a_{-1}$，故可不必考慮$a_{-1}$此項。)

2. 設$x = \sum_{i=1}^{\gamma} a_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{\gamma} \left(\frac{p-2}{2}{\alpha_i}^2 + \frac{4-p}{2}\alpha_i \right) \Rightarrow \beta x = \sum_{i=1}^{\gamma} \left(\frac{\beta(p-2)}{2}{\alpha_i}^2 + \frac{\beta(4-p)}{2}\alpha_i \right)$

   也就是說「對於任意非負整數x，x皆可表成數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項之和，其中$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, a_n = \frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n \rangle_{n=0}^{\infty}$。」等價於「對於任意型如$\beta x$的非負整數，$\beta x$皆可表成數列$\langle b_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項之和，

   其中$\langle b_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, b_n = \frac{\beta(p-2)}{2}n^2 + \frac{\beta(4-p)}{2}n \rangle_{n=0}^{\infty}$。」

3. 設$b \in \{b_0\}, r \in \{0, \beta, 2\beta, \dots, (\alpha - 2\beta - 1)\beta\}$，其中$b_0$為正奇數，

由此可知，對於任意非負整數x，存在b,r，

滿足$\beta x \equiv \beta b + r \pmod{\beta(p-2)}$。

4. 定義$a = \frac{2(\beta x - \beta b - r)}{\beta(p-2)} + b = \left(1 - \frac{2}{p-2}\right)b + \frac{2(\beta x - r)}{\beta(p-2)}$，由此可發現$a$亦為奇數。並且

可發現$\beta x = \frac{\beta(p-2)}{2}a + \frac{\beta(4-p)}{2}b + r$，於是根據【預備性質一】，

若$4a > b^2, b^2 + 2b + 4 > 3a$，則存在四非負整數$s,t,u,v$，滿足

$\begin{cases} a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 \\ b = s + t + u + v \end{cases}$，也就是說$\beta x = b_s + b_t + b_u + b_v + r$，而其中$r$可表成

數列$\langle b_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中$\alpha - 2\beta - 1$項之和，故$\beta x$可表成數列$\langle b_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的

$4 + (\alpha - 2\beta - 1) = \alpha - 2\beta + 3$項之和…[1]。

5. 而在【預備性質一】的前提中：

$$\begin{cases} 4a > b^2 \quad \Rightarrow b^2 - 4\left(1 - \frac{2}{p-2}\right)b - \frac{8(\beta x - r)}{\beta(p-2)} < 0 \\ b^2 + 2b + 4 > 3a \Rightarrow b^2 + \left(\frac{6}{p-2} - 1\right)b + 4 - \frac{6(\beta x - r)}{\beta(p-2)} > 0 \end{cases}$$

解此聯立不等式組可得其解為：

$$b \in \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{p-2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{p-2}\right)^2 - 4 + \frac{6(\beta x - r)}{\beta(p-2)}},\ 2 - \frac{4}{p-2} + \sqrt{\left(2 - \frac{4}{p-2}\right)^2 + \frac{8(\beta x - r)}{\beta(p-2)}}\right)$$

根據先前的假設中提到，此段開區間內需存在一奇數b_0，也就是說：

此段區間的長度需大於2，亦即不等式

$$\left(2 - \frac{4}{p-2} + \sqrt{\left(2 - \frac{4}{p-2}\right)^2 + \frac{8(\beta x - r)}{\beta(p-2)}}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{p-2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{p-2}\right)^2 - 4 + \frac{6(\beta x - r)}{\beta(p-2)}}\right) > 2$$

的成立為奇數b_0存在的充分條件，根據 4.中得到的小結[1]可知，若非負整數x滿足此不等式，則βx可表成數列$\langle b_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$4 + (\alpha - 2\beta - 1) = \alpha - 2\beta + 3$項之和。

6. 綜合以上，我們可知：已知$\beta x - r > m$時，x皆滿足上述的不等式，又因為$r \le (\alpha - 2\beta - 1)\beta$，故$\beta x > m + (\alpha - 2\beta - 1)\beta$為不等式成立的充分條件，而當$\beta x \le m + (\alpha - 2\beta - 1)\beta$時，若一一列舉後發現，$\beta x$可表成數列$\langle b_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$4 + (\alpha - 2\beta - 1) = \alpha - 2\beta + 3$項之和，則可知對於任意非負整數$\beta x$，$\beta x$皆可表成數列$\langle b_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$4 + (\alpha - 2\beta - 1) = \alpha - 2\beta + 3$項之和，也

就是說，非負整數x皆可表成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$4+(\alpha-2\beta-1)=\alpha-2\beta+3$項之和，亦即二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值小於等於$\alpha-2\beta+3$。

7. 另外，在已知$x>m$時，x皆滿足 5.中所述的不等式

$$\left(2-\frac{4}{p-2}+\sqrt{\left(2-\frac{4}{p-2}\right)^2+\frac{8(\beta x-r)}{\beta(p-2)}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}\right)^2-4+\frac{6(\beta x-r)}{\beta(p-2)}}\right)>2$$

若當$x\le m$時，若一一列舉後發現，βx可表成數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma'$項之和，其中$\gamma'>\alpha-2\beta+3$，則二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值等於$\gamma'$。

【說明】

藉由此模型，我們可得知二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值的可能上界，再搭配一一列舉的技巧(從1列舉至上述模型中所提到的m)後，我們甚至可得知二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值，我們並將模型一結合稍後所述的模型二後，寫成了一個程式(程式碼詳見附錄一)，借助電腦以更有效率地得知二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值。

(七)【探究過程七】

藉著模型一，我們可以探討對於某個給定的有理數p，二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值的可能上界為何？甚至，更可進一步求得二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值，搭配定理四，更可求得二次式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$之指標值的上界。

【基本例探究】

在以下定理六的證明中，我們將主要運用模型一與定理四，透過下列步驟，以求得當$p=\frac{5}{2}$時，二次式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$之指標值的上界，其中$t$為一正偶數。

1. 首先，藉由模型一，求得當$p=\frac{5}{2}$時，二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值的可能上界。
2. 再用一一檢視的方式尋求二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值的下界。
3. 然後，將下界持續抬升，使得上下界合二為一，

求得二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值。

最後，再用定理四求得二次式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$的指標值之上界。

【定理六】

在二次式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$中，已知$p=\frac{5}{2}$，

若t為正偶數，則$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$之指標值的上界為$t+3$。

【證明】

1. 首先，運用模型一來尋求二次式$\frac{\frac{5}{2}-2}{2}n^2+\frac{4-\frac{5}{2}}{2}n=\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}n$之指標值的上界，令數列：$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}n\rangle_{n=0}^{\infty}$

   (1) 定義：$b\in\{b_0\},r\in\{0\}$，其中b_0為一奇數，可發現，對於任意非負整數x，同餘式$x\equiv b+r\pmod 1$顯然成立。

   (2) 定義$a=\frac{2(2x-2b-r)}{1}+b=4x-3b-2r$，由此可知$a$亦為奇數。根據模型一中提到的：若$4a>b^2,b^2+2b+4>3a$，則$2x$可表成數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,b_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,0,2,5,9,14,20,27,35,\dots\rangle$中取出的$\alpha-2\beta+3$項之和。

   (3) 聯立不等式$\begin{cases}4a>b^2\\ b^2+2b+4>3a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0>b^2+12b-16x+8r\\ b^2+11b+4-12x+6r>0\end{cases}$

   解得b的範圍為$b\in\left(-\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{105+48x-24r}}{2},-6+\sqrt{36+16x-8r}\right)$

   又因$r=0$，所以可改寫成$b\in\left(-\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{105+48x}}{2},-6+\sqrt{36+16x}\right)$

   因此當不等式$\left(-6+\sqrt{36+16x}\right)-\left(-\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{105+48x}}{2}\right)>2$時，此區間內存在一奇數$b_0$。

   (4) 解該不等式可發現：當$x\geq 20$時，此不等式將會成立，所以說對任意大於等於40的偶數$2x$，$2x$皆可表成數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的4項之和。

   (5) 又一一列舉後可發現對任意小於40的偶數$2x$，$2x$皆可表成數列$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的4項之和。列舉如下：

$0 = 0 \times 4; 2 = 2 \times 1 + 0 \times 3; 4 = 2 \times 2 + 0 \times 2;$

$6 = 2 \times 3 + 0; 8 = 2 \times 4; 10 = 5 \times 2 + 0 \times 2;$

$12 = 5 \times 2 + 2 + 0; 14 = 5 \times 2 + 2 \times 2; 16 = 14 + 2 + 0 \times 2;$

$18 = 9 \times 2 + 0 \times 2; 20 = 9 \times 2 + 2 + 0; 22 = 20 + 2 + 0 \times 2;$

$24 = 20 + 2 \times 2 + 0;\ \ 26 = 20 + 2 \times 3; 28 = 14 \times 2 + 0 \times 2;$

$30 = 14 \times 2 + 2 + 0; 32 = 27 + 5 + 0 \times 2; 34 = 20 + 14 + 0 \times 2;$

$36 = 20 + 14 + 2 + 0; 38 = 20 + 14 + 2 \times 2$。

所以任意非負偶數$2x$皆可表成數列$\langle b_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的4項之和，故任意非負整數$x$皆可表成數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的4項之和，也就是說，二次式$\frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}n$之指標值的可能上界為4。

2. 在我們一一列舉的過程中，可發現：非負整數4，最少須由數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$1, 1, 1, 1$，總計4項之和來表達，所以說，二次式$\frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}n$之指標值的下界亦為4。

3. 故結合 1.與 2.中得到的結論可知，$\frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}n$之指標值等於4。

4. 再根據定理四，可知，若t為偶數，則$\frac{t}{4}n^2 + \frac{3t}{4}n + 1$之指標值的上界為$t + 3$，得證。

(八)【探究過程八】

在以上的探討中，我們討論的皆是如何系統性的找尋二次式指標值的上界，而並未討論二次式指標值的確切值。因此，在探究過程七中，我們便要開始藉由稍後所示的模型二來發掘型如$\frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n$的二次式指標值之下界(其中$p$為一有理數且$p = \frac{\alpha}{\beta}$)，再藉由附錄 1 中所附的程式，探討型如$\frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n$的二次式指標值之確切值，並探討此二者的關聯性，進而調整上述的模型，最後得出一個更佳的方法。

【基本例探究】

1. 藉由程式執行的結果，我們可將有理數p的分母β與二次式

$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值$\gamma$的關係表列如下(附錄 2 中將有更為詳細的表格)：

($p=\frac{11}{5},\frac{31}{14},\frac{67}{33},\frac{68}{33}$這四數為相當特殊的特例，故暫不考慮。)

有理數p的分母β之值	二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值$\gamma$	有理數p的分母β之值	二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值$\gamma$
1	α	11	$\alpha-16$
2	$\alpha-1$	12	$\alpha-17$
3	$\alpha-4$	13	$\alpha-19$
4	$\alpha-4$	14	$\alpha-19$
5	$\alpha-4$	15	$\alpha-25$
6	$\alpha-9$	16	$\alpha-25$
7	$\alpha-9$	17	$\alpha-25$
8	$\alpha-9$	18	$\alpha-28$
9	$\alpha-12$	19	$\alpha-28$
10	$\alpha-16$	20	$\alpha-31$

2. 由此表格可發現：當我們將p的分母α減掉二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值$\gamma$後，根據$p$的分母$\beta$值由小到大，$\alpha-\gamma$的值一一排序後，可得一數列$\langle\delta_n\rangle_{n=1}^{\infty}=\langle 0,1,4,4,4,9,9,9,12,16,16,17,19,19,25,25,25,28,28,31,\ \dots\ \rangle$，接下來我們將嘗試著提出一個模型以解釋此數列。
3. 首先，考慮有理數p的分母β為2的情況：

數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,0,1,\frac{1}{\beta}\alpha,\frac{3}{\beta}\alpha-3,\dots\rangle$

$=\langle 0,0,1,\frac{1}{2}\alpha,\frac{3}{2}\alpha-3,\dots\rangle$，然後我們考慮非負整數$\alpha$，可知$\alpha$可表成$\frac{1}{2}\alpha\times 2$，所以當我們考慮非負整數$\alpha-1$時，$\alpha-1$至少需表成$1\times(\alpha-1)$，共計$\alpha-1$項之和，因此二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值下界為$\alpha-1$，而根據上面的表格，二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值恰為$\alpha-1$。

4. 接下來，考慮有理數p的分母β為3的情況：

   數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,0,1,\frac{1}{\beta}\alpha,\frac{3}{\beta}\alpha-3,\dots\rangle$

   $=\langle 0,0,1,\frac{1}{3}\alpha,\alpha-3,\dots\rangle$，然後我們考慮非負整數$\alpha$，可知$\alpha$可表成

   $(\alpha-3)\times 1+1\times 3$，因為此表達式包含了3個1，所以當我們考慮非負整數$\alpha-4$時，$\alpha-4$至少需表成$1\times(\alpha-4)$，共計$\alpha-4$項之和，因此二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值下界為$\alpha-4$，而根據上面的表格，二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值恰為$\alpha-4$。

5. 接著，考慮有理數p的分母β為4的情況：

   數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,0,1,\frac{1}{\beta}\alpha,\frac{3}{\beta}\alpha-3,\frac{6}{\beta}\alpha-8\dots\rangle$

   $=\langle 0,0,1,\frac{1}{4}\alpha,\frac{3}{4}\alpha-3,\frac{6}{4}\alpha-8\rangle$，然後我們考慮非負整數$\alpha$，可知$\alpha$可表成

   $\left(\frac{3}{4}\alpha-3\right)\times 1+\left(\frac{1}{4}\alpha\right)\times 1+1\times 3$，因為此表達式包含了3個1，所以當我們考慮非負整數$\alpha-4$時，$\alpha-4$至少需表成$1\times(\alpha-4)$，共計$\alpha-4$項之和，因此二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值下界為$\alpha-4$，而根據上面的表格，二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值恰為$\alpha-4$。

6. 緊接著，考慮有理數p的分母β為5的情況：

   數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,0,1,\frac{1}{\beta}\alpha,\frac{3}{\beta}\alpha-3,\frac{6}{\beta}\alpha-8\dots\rangle$

   $=\langle 0,0,1,\frac{1}{5}\alpha,\frac{3}{5}\alpha-3,\frac{6}{5}\alpha-8\rangle$，然後我們考慮非負整數$\alpha$，可知$\alpha$可表成

   $\left(\frac{3}{5}\alpha-3\right)\times 1+\left(\frac{1}{5}\alpha\right)\times 2+1\times 3$，因為此表達式包含了3個1，所以當我們考慮非負整數$\alpha-4$時，$\alpha-4$至少需表成$1\times(\alpha-4)$，共計$\alpha-4$項之和，因此二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值下界為$\alpha-4$，而根據上面的表格，二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值恰為$\alpha-4$。

7. 綜合以上基本例的探究，可整理並得到模型二。

【模型二】

1. 設考慮的泛費馬二次式為$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$，其中有理數$p$的分母為$\beta$，分子為$\alpha$。
2. 因此所建構出的泛費馬二次式數列為

   $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{n^2-n}{2}p-(n-1)^2+1\rangle_{n=0}^{\infty}$

   $=\langle 0,0,1,\frac{1}{\beta}\alpha,\frac{3}{\beta}\alpha-3,\frac{6}{\beta}\alpha-8,\frac{10}{\beta}\alpha-15\ldots\rangle$。
3. 然後，找出小於等於α且其表達式(比方說，在四平方和定理的情況中，我們稱$4+1+1+1$為7的一種表達式)中不需用上非負整數1此項的最小正整數$\alpha-\delta_\beta+1$，由於$\alpha-\delta_\beta+1$的性質可知，非負整數$\alpha-\delta_\beta$至少須由$\alpha-\delta_\beta$個1表示之(證明在後面的 4.)，故$\alpha-\delta_\beta$為二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值下界，且根據我們目前的研究結果可猜想：出於某種目前未知的原因，二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值恰好正是$\alpha-\delta_\beta$。
4. 證明：非負整數$\alpha-\delta_\beta$至少須由$\alpha-\delta_\beta$個1表示之。

   設非負整數$\alpha-\delta_\beta$的表達式中含有x_i個a_i，也就是說，$\alpha-\delta_\beta=\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\times x_i)$，其中$0\le x_1<\alpha-\delta_\beta$

   考慮非負整數$\alpha-\delta_\beta-x_1$，$\alpha-\delta_\beta-x_1<\alpha$且其表達式為$\alpha-\delta_\beta=\sum_{i=2}^{\infty}(a_i\times x_i)$，表達式中不需用上非負整數1此項，又$\alpha-\delta_\beta-x_1<\alpha-\delta_\beta+1$，但根據$\alpha-\delta_\beta+1$的定義，得到矛盾。

   故$x_1=\alpha-\delta_\beta$，也就是說，非負整數$\alpha-\delta_\beta$至少須由$\alpha-\delta_\beta$個1表示之。

【說明】

此模型提出了一個目前看來相當好的方法來求出二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值之下界，況且截至目前的研究結果來看，此方法求出的指標值下界即是二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值，故可猜想：藉由此方法求出的二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值下界即是二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值。

然而不難看出，此模型中最難系統化執行的環節便是：找到一最小正整數$\alpha-$

$\delta_\beta + 1$，使得此數小於等於α且此數的表達式中不需用上非負整數1此項。因此，在未來我將著力於提出一更具系統性的方法來求出非負整數$\alpha - \delta_\beta + 1$，並嘗試著證明出此方法求出的二次式$\frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n$的指標值下界即是二次式$\frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n$的指標值。

(九)【探究過程九】

在探究過程九中，我將如前所述，針對正整數$\alpha - \delta_\beta + 1$的規則，繼續找出優化模型二的方法，並從中找到一些規則。

【深入探討與研究】

1. 我們想觀察在已知有理數p的分母β的情況下，找出小於等於α且其表達式中不需用上非負整數1此項的最小正整數$\alpha - \delta_\beta + 1$的方法。
2. 設$p_3(i) \le \beta < p_3(i+1)$，其中$p_3(i)$代表第$i$個三角形數，

   因為探討的二次式為$\frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n$，故所形成的泛費馬二次式數列

   $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, a_n = \frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n \rangle_{n=0}^{\infty}$

   $= \langle 0, a_n = \frac{n^2-n}{2}p - (n-1)^2 + 1 \rangle_{n=0}^{\infty} = \langle 0, 0, 1, \frac{1}{\beta}\alpha, \frac{3}{\beta}\alpha - 3, \frac{6}{\beta}\alpha - 8, \dots \rangle$
3. 因為我們要考慮的數為$\alpha - (\delta_\beta - 1)$，其$\alpha$項的係數為1，因此只需考慮數列中那些$\alpha$的係數小於等於1的項即可

   (比方說，若$\beta = 17$，則因為$17 < 21$，所以只需考慮

   $\langle 0, 0, 1, \frac{1}{17}\alpha, \frac{3}{17}\alpha - 3, \frac{6}{17}\alpha - 8, \frac{10}{17}\alpha - 15, \frac{15}{17}\alpha - 21 \rangle$這幾項即可)。另外因為加上0並不會影響一個數的值，且根據定義，$\alpha - \delta_\beta + 1$的表達式中不需用上非負整數1，所以我們須考慮的項便只剩下：

   $\langle \frac{1}{\beta}\alpha, \frac{3}{\beta}\alpha - 3, \frac{6}{\beta}\alpha - 8, \frac{10}{\beta}\alpha - 15, \dots, \frac{p_3(i)}{\beta}\alpha - (p_4(i) - 1), \dots \rangle$，其中$p_4(i)$代表第$i$個四邊形數。
4. 換句話說，便是要從這幾項中找出一些項，使得這些項的和為$\alpha - (\delta_\beta - 1)$，觀察這些項後可發現，這些項全可寫成$\frac{p_3(n)}{\beta}\alpha - (p_4(n) - 1)$的形式，因此我們

最後將此形式與$\alpha-(\delta_\beta-1)$互相對照後可發現，探討的問題可改寫成：

已知$\sum_{j=1}^{m}p_3(n_j)=\beta$，其中$m$為正整數且$n_j$皆為非1的非負整數，試求$\sum_{j=1}^{m}(p_4(n_j)-1)$的最大值，而其中$\sum_{j=1}^{m}(p_4(n_j)-1)$的最大值即為$\delta_\beta-1$。

【定理七】

已知探討的泛費馬二次式為$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$，且$\alpha-(\delta_\beta-1)$代表小於等於$\alpha$且其表達式中不需用上非負整數1此項的最小正整數，求此處的$\delta_\beta-1$之值的方法等價於解如下問題：

「已知$\sum_{j=1}^{m}p_3(n_j)=\beta$，其中$m$為正整數且$n_j$皆為非1的非負整數，試求$\sum_{j=1}^{m}(p_4(n_j)-1)$的最大值，而其中$\sum_{j=1}^{m}(p_4(n_j)-1)$的最大值即為$\delta_\beta-1$。」

(求$\delta_\beta-1$之值的意義在於：求得$\delta_\beta-1$之值，即可得知二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$指標值的下界$\alpha-\delta_\beta$。)

【證明】

已知$p_3(i)\le\beta<p_3(i+1)$，$\sum_{j=1}^{m}p_3(n_j)=\beta$，

數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}$

設$y=\sum_{j=1}^{m}(p_4(n_j)-1)$，也就是說，$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}p_3(n_j)=\beta\\ \sum_{j=1}^{m}(p_4(n_j)-1)=y\end{cases}$

$\Rightarrow\alpha-y=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_3(n_j)}{\beta}\times\alpha-(p_4(n_j)-1)\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(a_{n_j}\right)$。

也就是說，非負整數$\alpha-y$的表達式即為$\sum_{j=1}^{m}\left(a_{n_j}\right)$，

又因為n_j皆是非1的非負整數，對照$\alpha-\delta_\beta+1$的定義可知：δ_n-1即為y的最大值，得證。

參、研究結果與討論

一、在本研究中，我們所研究的核心問題便是：

給定二次式$\frac{t(p-2)}{2}(n-k)^2+\frac{t(4-p)}{2}(n-k)+1$，並由此二次式建構出了一個數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,a_n=\frac{t(p-2)}{2}(n-k)^2+\frac{t(4-p)}{2}(n-k)+1\rangle_{n=0}^{\infty}$，試求一最小正整數$\gamma$，使得

對於任意非負整數x，x皆可表成數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項之和，我們於是稱正整數$\gamma$為二次式$\frac{t(p-2)}{2}(n-k)^2+\frac{t(4-p)}{2}(n-k)+1$的指標值。

舉例來說，根據四平方和定理，4即是二次式n^2的指標值。

二、最後，我們結合了前述模型與定理的結果，進而表達出二次式

$\frac{t(p-2)}{2}(n-k)^2+\frac{t(4-p)}{2}(n-k)+1$之指標值的上界，其中$t\in\mathbb{N},p\in\mathbb{Q}$。

(二次式$\frac{t(p-2)}{2}(n-k)^2+\frac{t(4-p)}{2}(n-k)+1$之指標值的下界可以一一檢驗的方法而得，除了運算時間冗長外，其運算難度幾可忽略不計，故在此暫不詳加探討，留待來日再進行探討。)

在結合前述的研究後，可知：

已知二次式$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$滿足泛費馬二次式函數的廣義定義域後，求得二次式$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$的指標值的流程如下：

1. 根據定理一，二次式$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$的指標值將小於等於二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$的指標值，故可先行考慮二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$的指標值，如此一來，即可求得二次式$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$的指標值之上界。
2. 考慮$a+b$的數值：
   (1) 若$a+b=0$，則根據定理三，可知泛費馬二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$的指標值等於$a+2$，寫作Yi$\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right)=a+2$。於是，即可知$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$的指標值之上界為$a+2$。
   (2) 若$a+b>0$，則根據定理五，將二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$的表達式，轉成型如$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1,t\in\mathbb{N},p\in\mathbb{Q},p>2$ 的型式，再行探討。
3. 而後，先運用模型一、二求$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$，運用模型一，即可求得$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值之可能上界；同時透過模型一，我們只需再一一驗證有限個數，即可知

$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值之下界(若不需要「完美」的下界，可根據模型二更為迅速的求得下界)

4. 再根據定理四：若已知二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的指標值為$\gamma$，則二次式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$的指標值將小於等於$t+\gamma-1$。
5. 於是，可求得二次式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$的指標值之上界$t+\gamma-1$，進而求得二次式$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$的指標值之上界亦為$t+\gamma-1$。
6. 最後，再以一一列舉的方式找出二次式$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$之指標值的下界。
7. 在大多數的情況下，所求出的二次式$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$之指標值的上界與下界將會相等，換句話說，將可求得二次式$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$的確切指標值。

肆、結論與應用

一、結論

在本研究中，我們運用了數論與代數學的一些基本性質，拓展了費馬多邊形數定理的結果，精確地說，相較於費馬多邊形數定理所探究的二次式是為：m邊形數的通式$\frac{m-2}{2}n^2+\frac{4-m}{2}n$，本研究的探究範圍涵蓋了更為一般化的二次式：$\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+1$，而對於此二次式的限制也降到了最低，僅僅要求其構造 出的數列是為非負整數數列，以這些二次式為目標進行探討，遂有了上述的研究成果。總而言之，本研究提供出了一套系統性的方法，使得對於所有給定的二次式，皆可探討出這些二次式指標值的上界。唯一美中不足的是，目前依然無法確認此上界即為該給定二次式的指標值。

二、未來展望：

承上於結論中所述，根據目前的研究成果，僅可被動的「驗證」求出的指標值上界是否為真正的指標值，而無法主動的「證明」之。因此，在未來我將會持續進行研究，以期達成以下目標。

(一) 深入研究定理七中與找下界的方法等價的問題：「已知$\sum_{j=1}^{m} p_3(n_j) = \beta$，其中$m$為正整數且$n_j$皆為非1的非負整數，試求$\sum_{j=1}^{m}(p_4(n_j) - 1)$的最大值，而其中$\sum_{j=1}^{m}(p_4(n_j) - 1)$即為$\delta_\beta - 1$」，進而找出此問題的一般化的解答。

(二) 優化本研究中的模型，期望得以毋需借助電腦即可有效率的求得二次式$\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n + 1$的指標值。

(三) 找出一簡潔的關係式表達出二次式$\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n + 1$與其所對應之指標值$\gamma$的關係。

(四) 將探討的範圍從二次式擴展至三次式，並找出一簡潔的關係式表達三次式與三次式之指標值之間的關係。

三、應用

數學上的未解問題：華林問題

1770 年，愛德華·華林發表了《**代數沉思錄**》（Meditationes Algebraicae），其中說，每一個正整數至多是 9 個立方數之和；至多是 19 個四次方之和。並猜想，對於每個非 1 的正整數k，皆存在正整數$g(k)$，使得每個正整數都可以表示為至多$g(k)$個k次方數（即正整數的k次方）之和。(節錄自維基百科)

在此問題中，萊昂哈德·歐拉之子 J.A.歐拉猜想：$g(k) = 2^k + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 2$，但至今仍未獲證明，故在將來，此研究持續深入探討的話，可能可為華林問題做出貢獻。

伍、參考文獻與連結

一、https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%9B%E5%B9%B3%E6%96%B9%E5%92%8C%E5%AE%9A%E7%90%86

二、EYPHKA! num = Δ + Δ + Δ. By GEORGE E. ANDREWS* In 1986

三、ALL POSITIVE INTEGERS ARE SUMS OF VALUES OF A QUADRATIC FUNCTION OF x*. BY L. E. DICKSON IN 1927

四、A SHORT PROOF OF CAUCHY'S POLYGONAL NUMBER THEOREM PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 99, Number 1. January 1987

【附錄一】

程式碼如下：

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define testnum 5
#define maxbeta 101
std::vector<int> a;
int get_m(int alpha,int beta)
{
	double a1=(double)alpha,b1=(double)beta,temp=0.0;
	double p2=a1/b1-2,x=0.0,r=(a1-2*b1-1)*b1;
	for(;temp<2;x++)
	{
		if((1.0/2.0-3.0/p2)*(1.0/2.0-3.0/p2)+6.0*(x-r)-4.0<0.0)
			continue;
		temp=3.0/2.0-1.0/p2+sqrt((2.0-4.0/p2)*(2.0-4.0/p2)+8.0*(b1*x-r)/(b1*p2))-sqrt((1.0/2.0-
3.0/p2)*(1.0/2.0-3.0/p2)+6.0*(b1*x-r)/(b1*p2)-4.0);
	}
	return x;
}
int hypothesis(int m,int alpha,int beta)
{
	int items,i;
	bool if_there_is;
	vector<int>::iterator it;
	bool num[beta*m+1]={false};
	num[0]=true;
```

```
    for(items=0;if_there_is==false;items++)
    {
        for(i=beta*m-1;i>=0;i--)
        {
            if(num[i]==true)
            {
                for(it=a.begin();it!=a.end();it++)
                {
                    if(i+*it<beta*m+1)
                        num[i+*it]=true;
                }
            }
        }
        if_there_is=true;
        for(i=1;i<m+1;i++)
        {
            if(num[beta*i]==false)
            {
                if_there_is=false;
                break;
            }
        }
    }
    return items;
}
bool cp(int q,int p)
{
```

```
        for(int i=2;i<=p;i++)
        {
                if(q%i==0&&p%i==0)
                        return false;
        }return true;
}
int main()
{
        int alpha,beta,if_hypothesis_is_true,m,j,r,i,an;
        for(beta=2;beta<maxbeta;beta++)
        {
                for(alpha=beta*2+1,j=0;j<testnum;alpha++)
                {
                        if(cp(alpha,beta))
                        {
                                m=get_m(alpha,beta);
                                an=0;
                                a.clear();
                                for(i=0;an<beta*(m-1)+1;i++)
                                {
                                        a.push_back(an);
                                        an=((alpha-beta*2)*i*i+(beta*4-alpha)*i)/2;
                                }
                                r=hypothesis(m-1,alpha,beta);
                                cout<<endl<<"alpha:"<<alpha<<" "<<"beta:"<<beta<<" "<<r<<" "<<alpha-
r<<endl;j++;
                        }
```

```
            }
        }
        return 0;
}
```

【附錄二】

有理數p的分母β之值	二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值$\gamma$	有理數p的分母β之值	二次式$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之指標值$\gamma$
1	α	51	$\alpha-89$
2	$\alpha-1$	52	$\alpha-89$
3	$\alpha-4$	53	$\alpha-89$
4	$\alpha-4$	54	$\alpha-92$
5	$\alpha-4$	55	$\alpha-100$
6	$\alpha-9$	56	$\alpha-100$
7	$\alpha-9$	57	$\alpha-100$
8	$\alpha-9$	58	$\alpha-103$
9	$\alpha-12$	59	$\alpha-103$
10	$\alpha-16$	60	$\alpha-105$
11	$\alpha-16$	61	$\alpha-108$
12	$\alpha-17$	62	$\alpha-108$
13	$\alpha-19$	63	$\alpha-108$
14	$\alpha-19$	64	$\alpha-112$
15	$\alpha-25$	65	$\alpha-115$
16	$\alpha-25$	66	$\alpha-121$
17	$\alpha-25$	67	$\alpha-121$
18	$\alpha-28$	68	$\alpha-121$

19	$\alpha - 28$	69	$\alpha - 124$
20	$\alpha - 31$	70	$\alpha - 124$
21	$\alpha - 36$	71	$\alpha - 124$
22	$\alpha - 36$	72	$\alpha - 129$
23	$\alpha - 36$	73	$\alpha - 129$
24	$\alpha - 39$	74	$\alpha - 129$
25	$\alpha - 40$	75	$\alpha - 132$
26	$\alpha - 40$	76	$\alpha - 136$
27	$\alpha - 44$	77	$\alpha - 136$
28	$\alpha - 49$	78	$\alpha - 144$
29	$\alpha - 49$	79	$\alpha - 144$
30	$\alpha - 49$	80	$\alpha - 144$
31	$\alpha - 52$	81	$\alpha - 147$
32	$\alpha - 52$	82	$\alpha - 147$
33	$\alpha - 52$	83	$\alpha - 148$
34	$\alpha - 57$	84	$\alpha - 152$
35	$\alpha - 57$	85	$\alpha - 152$
36	$\alpha - 64$	86	$\alpha - 152$
37	$\alpha - 64$	87	$\alpha - 156$
38	$\alpha - 64$	88	$\alpha - 159$
39	$\alpha - 67$	89	$\alpha - 159$
40	$\alpha - 67$	90	$\alpha - 161$
41	$\alpha - 67$	91	$\alpha - 169$
42	$\alpha - 72$	92	$\alpha - 169$
43	$\alpha - 73$	93	$\alpha - 169$
44	$\alpha - 73$	94	$\alpha - 172$

45	$\alpha-81$	95	$\alpha-172$
46	$\alpha-81$	96	$\alpha-172$
47	$\alpha-81$	97	$\alpha-177$
48	$\alpha-84$	98	$\alpha-177$
49	$\alpha-84$	99	$\alpha-179$
50	$\alpha-84$	100	$\alpha-180$

(目前發現分母小於 100 且不符上述表格的特例：$p=\frac{11}{5},\frac{31}{14},\frac{67}{33},\frac{68}{33}$)

【評語】010012

這個作品引伸了任意數可以寫成4個平方和的定理來探討可以寫二次多項式的平方和，內容充實而且有創意；如果可以不用電腦輔助而能直接獲得成果就會更好。